公式集：解析 I

A. 数列

A–1. 数列とその和

A-1-1 [**等差数列**]

初項 a, 公差 d の等差数列の 一般項 a_n は　$a_n = a+(n-1)d$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

A-1-2 [**等差数列の和**]

初項 a, 公差 d の等差数列の和の初項から第 n 項までの和 S_n は

$S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}\ \cdots(1)$

第 n 項を l とすると　$S_n = \dfrac{n(a+l)}{2}\ \cdots(2)$

A-1-3 [**等比数列**]

初項 a, 公比 r の等比数列の一般項は $a_n = ar^{n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

A-1-4 [**等比数列の和**]

初項 a, 公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$r \neq 1$ のとき $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r = 1$ のとき $S_n = a+a+\cdots+a = na$

A-1-5 [**和の公式**]

(1)　$1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(2)　$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

(3)　$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

A-1-6 [$\sum$ **の性質**]

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$　(複号同順)

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$　（ c は定数）

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc$

A-1-7 [**数学的帰納法**]

自然数 n に関する命題は、次の 2 つのことが証明されればすべての自然数 n について成り立つ。

(i)　$n=1$ のときその命題が成り立つ。

(ii)　ある自然数 k について、 $n=k$ のときその命題が成り立つと仮定すれば、$n=k+1$ のときにも成り立つ。

A–2. 無限数列

A-2-1 [**極限の性質**]

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束し、それぞれの極限値を α, β とするとき、

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ (複号同順)

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c\, a_n = c\alpha$ （ c は定数)

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$

(4) $b_n \neq 0,\ \beta \neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

(5) すべての番号 n について $a_n \leqq b_n$ ならば $\alpha \leqq \beta$

A-2-2 [**無限等比数列 $\{r^n\}$ の収束・発散**]

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r \geqq 1) \\ 1 & (r = 1) \\ 0 & (-1 < r < 1) \\ \text{振動する} & (r \leqq -1) \end{cases}$$

A-2-3 [**無限等比級数の和**]

初項 $a \neq 0$, 公比 r の無限等比級数が収束するための必要十分条件は $|r| < 1$ である。そのとき級数の和は次の式で与えられる。

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

A-2-4 [**無限級数の性質**]

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ （ c は定数）

A-2-5 [**無限級数の収束・発散**]

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Longrightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(2) 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

B. 微分法

B–3. 整式の導関数

B-3-1 [**関数の極限値の性質**]

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)$ が収束し、それぞれの極限値を α, β とするとき

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$ （複号同順）

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a} c\, f(x) = c\alpha$ (c は定数)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

(4) $x = a$ の近くで $g(x) \neq 0,\ \beta \neq 0$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$

(5) $x = a$ の近くでつねに $f(x) \leqq g(x)$ ならば $\alpha \leqq \beta$

B-3-2 [**微分係数の定義**]

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

B-3-3 [**導関数の定義**]

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

B-3-4 [x **の累乗の導関数（１）**]

n が自然数のとき $(x^n)' = nx^{n-1}$

定数 c については $(c)' = 0$

B-3-5 [**導関数の性質**]

(1) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$ （複号同順）

(2) $\{c\,f(x)\}' = c\,f'(x)$ (c は定数)

B-3-6 [**接線の方程式**]

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(a,\ f(a))$ における接線の方程式は $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

B–4. **関数の増減**

B-4-1 [**導関数の符号と関数の増減（１）**]

関数 $f(x)$ について、区間 D で

つねに $f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ は区間 D で増加である。

つねに $f'(x) < 0 \Longrightarrow f(x)$ は区間 D で減少である。

B-4-2 [**導関数の符号と関数の増減（２）**]

区間 D でつねに $f'(x) = 0$ ならば、$f(x)$ はその区間 D で一定である。

B-4-3 [**導関数の符号と極値**]

関数 $f(x)$ について、x が増加するにつれて

(1) $f'(x)$ の符号が $x = a$ の前後で正から負に変われば、$f(x)$ は $x = a$ で極大になる。

(2) $f'(x)$ の符号が $x = a$ の前後で負から正に変われば、$f(x)$ は $x = a$ で極小になる。

B-4-4 [**極値をとるための必要条件**]

関数 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとる $\Longrightarrow f'(a) = 0$

B–5. **いろいろな関数の導関数**

B-5-1 [**関数の連続性**]

関数 $f(x),\, g(x)$ が $x = a$ で連続ならば、$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $x = a$ で連続である。ただし、商の場合は $g(a) \neq 0$ とする。

B-5-2 [**中間値の定理**]

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で、$f(a) \neq f(b)$ であるとする。このとき、$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の k に対して $f(c) = k$ であるような c が開区間 (a, b) の中に少なくとも１つ存在する。

B-5-3 [**微分可能と連続性**]

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば、$f(x)$ は $x=a$ で連続である。
区間 D で微分可能ならば、$f(x)$ は D で連続である。

B-5-4 [**積と商の導関数**]

関数 $f(x),\ g(x)$ が微分可能ならば、

(1) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ （積の微分）

(2) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ （商の微分）

B-5-5 [**合成関数の導関数**]

関数 $y=f(t), t=g(x)$ が微分可能であるとき、合成関数 $y=f(g(x))$ の x についての導関数 は

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = f'(t)g'(x)$ で与えられる。

B–6. 対数関数・指数関数・三角関数の導関数

B-6-1 [**対数関数の導関数**]

$(\log x)' = \frac{1}{x}$

B-6-2 [**指数関数の導関数**]

$(e^x)' = e^x$

B-6-3 [x **の累乗の導関数（２）**]

任意の実数 p に対して $(x^p)' = px^{p-1}$ $(x>0)$

B-6-4 [**三角関数の極限値**]

角 θ を弧度法で表すとき $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

B-6-5 [**三角関数の導関数**]

$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

B–7. 導関数の応用

B-7-1 [**法線の方程式**]

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $P(a,\ f(a))$ における法線の方程式は

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

B-7-2 [**関数** $y=f(x)$ **の一次近似と微分**]

$f(x+\Delta x) \fallingdotseq f(x) + f'(x)\Delta x$ $dy = f'(x)dx$

C. **積分**

C–8. **不定積分**

C-8-1 [**不定積分 (原始関数）の定義**]

関数 $f(x)$ に対して、導関数が $f(x)$ となるような関数、すなわち $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の **不定積分** または **原始関数** という。

関数 $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とするとき

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ （ただし C は積分定数）

C-8-2 [**不定積分の公式**]

$$\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C \quad (p \text{ は実数、} p \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$$

$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

C-8-3 [**和と定数倍の積分**]

$\int \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ （k は定数）

C-8-4 [**置換積分法**]

$t = \varphi(x)$ とおくとき、

$$\int f(\varphi(x))\,\frac{d\varphi}{dx}dx = \int f(t)\,dt$$

C-8-5 [x **の１次式を** t **で置換する場合**]

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ であるとき、

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad (a \neq 0)$$

C-8-6 [**置換積分の公式**]

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$$

C-8-7 [**部分積分法**]

$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

C–9. **定積分**

C-9-1 [**定積分の定義（１）**]

関数 $f(x)$ が連続であり、$F(x)$ がその不定積分であるとき、値 $F(b) - F(a)$ を記号

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

で表し、$f(x)$ の a から b までの **定積分** という。

C-9-2 [**関数の和・差および定数倍の定積分**]

$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$ （複号同順）

$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ （k は定数）

C-9-3 [**定積分による面積の計算（1）**]

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続で、つねに $f(x) \geqq 0$ であるとき、曲線 $y=f(x)$ と x 軸および２直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれた図形の面積は　$S=\int_a^b f(x)\,dx$ で与えられる。

C-9-4 [**定積分の性質**]

$f(x)$ でが区間 D で連続であるとき、その区間に含まれる任意の $a,\ b,\ c$ について次の式が成り立つ。　$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$

C-9-5 [**定積分の置換積分法**]

$\varphi(x)=t,\ \varphi(a)=\alpha,\ \varphi(b)=\beta$ とするとき

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\frac{d\varphi}{dx}dx=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

C-9-6 [**偶関数、奇関数の定積分の公式**]

区間 $[-a,\ a]$ における定積分について次の公式が成り立つ。

(1)　偶関数 $f(x)$ に対して　　$\int_{-a}^a f(x)\ dx=2\int_0^a f(x)\ dx$

(2)　奇関数 $f(x)$ に対して　　$\int_{-a}^a f(x)\ dx=0$

C-9-7 [**定積分の部分積分法**]

$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)\,dx$

C-9-8 [$\sin^n x,\ \cos^n x$ **の定積分**]

n が２以上の自然数のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\ dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\text{ が偶数 })\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & (n\text{ は奇数 })\end{cases}$$

C–10. 定積分の応用

C-10-1 [**定積分による面積の計算（2）**]

関数 $f(x),\ g(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続で、つねに $f(x)\geqq g(x)$ であるとき、２つの曲線

$y=f(x), y=g(x)$ と２直線 $x=a, x=b$ で囲まれた面積 S は次の式で与えられる。

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}\ dx$$

C-10-2 [**定積分による体積の計算**]

１つの立体を x 軸に垂直な平面で切った切り口の面積 $S(x)$ が連続関数であるとき、x 軸上の２点 a,b を通る２平面の間にある部分の立体の体積 V は次の定積分で与えられる。　　$V=\int_a^b S(x)\,dx$

C-10-3 [**回転体の体積**]

曲線 $y=f(x)\geqq 0\ \ (a\leqq x\leqq b)$ を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V は次の定積分で与えられる。

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2\ dx$$