n 回微分したら元に戻る関数

東海大学　渡辺　信

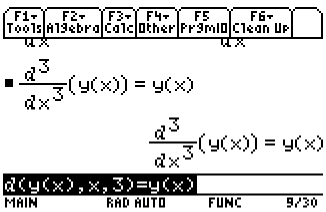
watanabe@scc.u-tokai.ac.jp

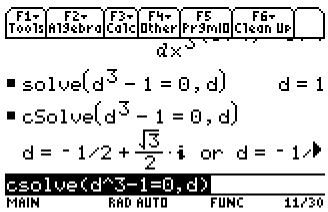
1.　n 回微分して元に戻る関数の一覧

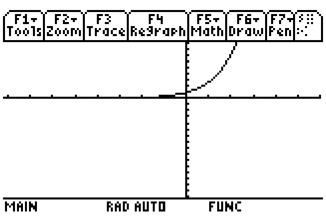
回数	1	2	4	4	個数	参考
1	e^x				1	
2	e^x	e^{-x}			2	sinh(x) cosh(x)
3	e^x				(3)	$e^{-1/2x}\cdot\cos(\sqrt{3}/2x)$ $e^{-1/2x}\cdot\sin(\sqrt{3}/2x)$
4	e^x	e^{-x}	sin(x)	cos(x)	4	

2.　この問題は微分方程式の問題？

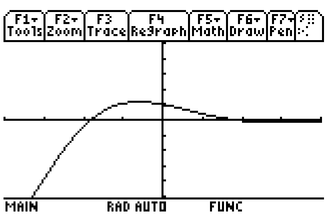
3 回微分して元に戻る関数を求めることは，微分方程式 $y^{(3)} = y$ を解くことによって求まる．この解は $D^3=1$ の解を用いて 3 回微分して元に戻る関数は次ぎの 3 個であることが分かる．





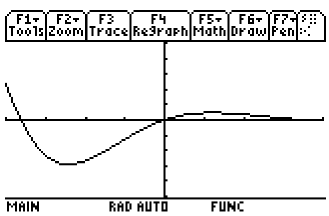


$y = e^{1x}$



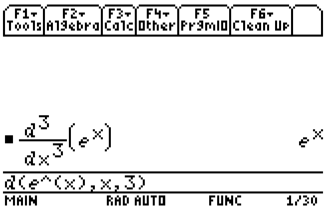
$y = e^{-1/2x} * e^{\sqrt{3}/2\,i\,x}$

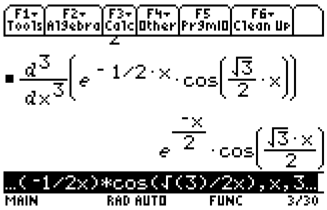
$= e^{-1/2x} * \cos\sqrt{3}/2\,x$

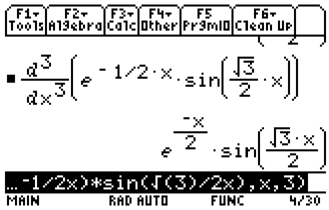


$y = e^{-1/2x} * e^{-\sqrt{3}/2\,i\,x}$

$= e^{-1/2x} * \sin\sqrt{3}/2\,x$







3 回微分した時に元に戻る関数　　$y16= e^{-1/2x}\cdot\cos(\sqrt{3}/2x)$　　$y17(x)= e^{-1/2x}\cdot\sin(\sqrt{3}/2x)$

3 回微分した時に元に戻る関数のグラフを見る

3. 1 回微分して元に戻る関数を作る

1 回微分して元に戻る関数を級数で求めることは, 簡単な微分積分の計算をすることによって分かる.

微分を用いる

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots\cdots + a_nx^n + \cdots$

両辺を微分

$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \cdots\cdots + (n+1)a_nx^n + \cdots$

二つの関数が等しいことから，係数を比較して $a_n = a_0/n!$，$a_0 = 1$ と求められる.

積分を用いる

初めに $y = 1$ とおく．微分しても同じから，$y' = 1$ となる.

$y = 1$　　　$+ x$

微分したら 1 になる関数を積分で作る

$y' = 1$

$y' = 1$ となるとなるためには，$y = 1 + x$ が決まる.

この論法を繰り返すことによって

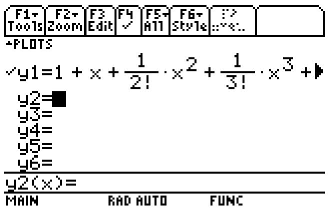
$y = 1 + x + 1/2!\, x^2 + 1/3!\, x^3 + 1/4!\, x^4 + 1/5!\, x^5 + \cdots\cdots + 1/n!\, x^n + \cdots$

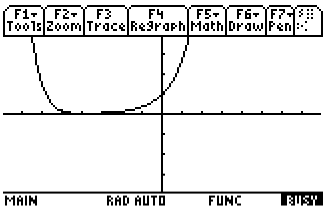
のように決まる.

微分しても変化しない関数は

$y = 1 + x + 1/2!\, x^2 + 1/3!\, x^3 + 1/4!\, x^4 + 1/5!\, x^5 + \cdots\cdots + 1/n!\, x^n + \cdots$

であり，この関数は $y = e^x$ の Taylor 展開になっている．この関数のグラフを見る.





原点の付近　$y = e^x$ になる

1 回微分しても変わらない関数は，この関数だけしかないことも分かる．この関数が $y = e^x$ であることも興味深い．級数としての表現から Taylor 展開とのかかわりを考える.

3．微分の回数と Taylor 展開

基本になる関数を $y = 1 + x + 1/2!\,x^2 + 1/3!\,x^3 + 1/4!\,x^4 + 1/5!\,x^5 + \cdots\cdots + 1/n!\,x^n + \cdots$ とし，この関数からｎ回微分して元に戻る関数を mod ｎを用いて作り出すことができる．

（１） １回で元に戻る関数

$$y = 1 + x + 1/2!\,x^2 + 1/3!\,x^3 + 1/4!\,x^4 + 1/5!\,x^5 + \cdots\cdots + 1/n!\,x^n + \cdots$$

この関数そのままであり，特別に問題はない．

（２） ２回で元に戻る関数

１回で元に戻る関数を偶奇性(mod２)を用いて２つに分ける．

$$Y0 = 1 + 1/2!\,x^2 + 1/4!\,x^4 + 1/6!\,x^6 + \cdots\cdots + 1/2n!\,x^{2n} + \cdots \quad \text{(偶数次数)}$$

$$Y1 = x + 1/3!\,x^3 + 1/5!\,x^5 + 1/7!\,x^7 + \cdots\cdots + 1/(2n+1)!\,x^{(2n+1)} + \cdots \quad \text{(奇数次数)}$$

１回で元に戻るか数数を偶数奇数次で分ける．この二つの関数は２回続けて微分すると元に戻る関数である．この２つ関数は別の表現の仕方を持っている．

$$Y1 = \sinh(x)$$

$$Y2 = \cosh(x)$$

であり，この良く知られた関数の存在の理由も明確になる．この際，２回微分して元に戻る関数が $y = e^x$，$Y1 = \sinh(x)$，$Y2 = \cosh(x)$の３個の関数になるが，この関数は一次従属となり，このうちの２つが独立した関数として数えられる．

また，次数の偶奇での２分法ではなく，係数の符号による分け方が存在する．

すべての符号が同じ(係数の符号が+になる関数)

$$y = 1 + x + 1/2!\,x^2 + 1/3!\,x^3 + 1/4!\,x^4 + 1/5!\,x^5 + \cdots\cdots + 1/n!\,x^n + \cdots = e^x$$

これと，係数の符号が+，-と交互に変わる関数を考える．

$$y = 1 - x + 1/2!\,x^2 - 1/3!\,x^3 + 1/4!\,x^4 - 1/5!\,x^5 + \cdots\cdots + 1/2n!\,x^{2n} + \cdots = e^{-x}$$

この２通りの考え方があるが，次のようになっている．

$$Y1 = \sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$$

$$Y2 = \cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$$

１回で元に戻る関数を２つの方法で分ける

$$y = 1 + x + 1/2!\,x^2 + 1/3!\,x^3 + 1/4!\,x^4 + \cdots\cdots + 1/n!\,x^n + \cdots = e$$

（１）次数の偶数奇数で分ける

（２）符号の＋，－の交互性で分ける

（３） ３回で元に戻る関数

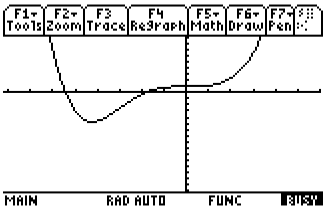
１回で元に戻る関数を（mod３)を用いて３つに分ける．

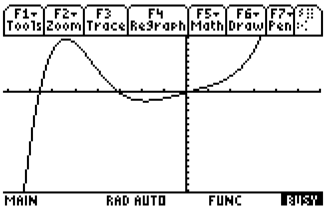
$$Y0 = 1 + 1/3!\,x^3 + 1/6!\,x^6 + 1/9!\,x^9 + \cdots\cdots + 1/(3n)!\,x^{3n} + \cdots$$

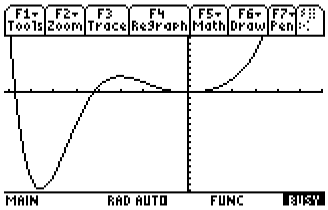
$$Y1 = x + 1/4!\,x^4 + 1/7!\,x^7 + 1/10!\,x^{10} + \cdots\cdots + 1/(3n+1)!\,x^{(3n+1)} + \cdots$$

$$Y2 = 1/2!\,x^2 + 1/5!\,x^5 + 1/8!\,x^8 + 1/11!\,x^{11} + \cdots\cdots + 1/(3n+2)!\,x^{(3n+2)} + \cdots$$

この関数のグラフを示すと次のような概形になる．この 3 つの関数に該当する既知関数はない．



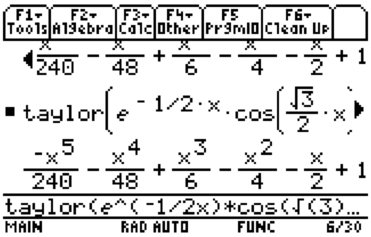




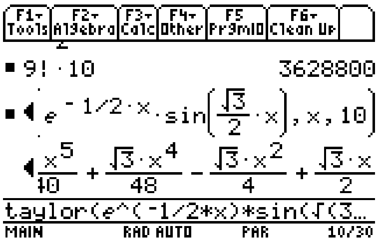
Y0＝1 +1/3! x^3 +1/6! x^6+・・・　　　Y1＝x +1/4! x^4+1/7! x^7 +・・・　　　Y2＝1/2! x^2 +1/5! x^5 +1/8! x^8・・・

１回で元に戻る関数は， y ＝ e^x＝Y0+Y1+Y2 であり，やはり一次従属の関係になっている．
3回微分すると元に戻る関数は3個であることは一次独立としてどの3つの関数を選ぶかの違いである．

この解は微分方程式を解いて求めた関数とも異なる．そこで，微分方程式で求めた解の Taylor 展開によってこの関数を示すと次のようないなる．



y= $e^{-1/2x}$・cos(√3/2x)の Taylor 展開



y= $e^{-1/2x}$・sin(√3/2x)の Taylor 展開

y＝ $e^{-1/2x}$・cos(√3/2x)

＝1－1/2x－1/4x^2＋1/6x^3－1/48x^4－1/240 x^5＋1/720 x^6－1/10080 x^7－1/80640 x^8

＋1/362880 x^9－1/7257600 x^{10}－・・・・・

＝　　　　　1 ＋1/3! x^3 ＋1/6! x^6＋1/９! x^9＋・・・・・

－1/2（　 x ＋1/4! x^4 ＋1/7! x^7＋1/10! x^{10}＋・・・・）

－1/2（1/2x^2 ＋1/5! x^5 ＋1/8! x^8 ＋1/11! x^{11}＋・・・・）

＝ Y0－1/2 Y1－1/2 Y2

y＝ $e^{-1/2x}$・sin(√3/2x)

＝√3/2x－√3/4x^2＋√3/48x^4－√3/240 x^5＋√3/10080 x^7－√3/80640 x^8

＋√3/7257600 x^{10}－・・・・・

＝ √3/2（　 x ＋1/4! x^4 ＋1/7! x^7＋1/10! x^{10}＋・・・・）

－√3/2（1/2x^2 ＋1/5! x^5 ＋1/8! x^8 ＋1/11! x^{11}＋・・・・）

＝ √3/2 Y1－√3/2 Y2

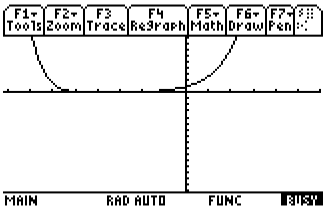
y＝ $e^{-1/2x}$・cos(√3/2x)，y＝ $e^{-1/2x}$・sin(√3/2x)もともに，Y0，Y1，Y2 よって表現される．符号のならび方に興味があったが，(＋，－，－）だけではなく係数が 1 ではなかった．Taylor 展開はすべて

次に 3 つの関数 Y0，Y1，Y2 の合成を考える．そのとき特殊な関数になる可能性があるかをグラフを用いて観察する．

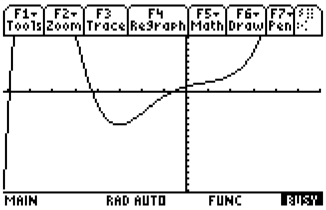
$Y0 = 1 + 1/3!\, x^3 + 1/6!\, X^6 + \cdots$ （次数が 3 で割切れる）

$Y1 = x + 1/4!\, X^4 + 1/7!\, X^7 + \cdots$ （3 で割ってあまり 1）

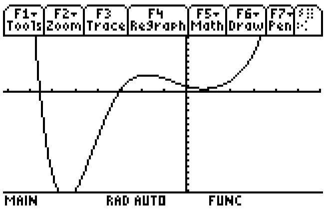
$Y2 = 1/2!\, x^2 + 1/5!\, X^5 + 1/8!\, X^8 \cdots$ （3 で割ってあまり 2）



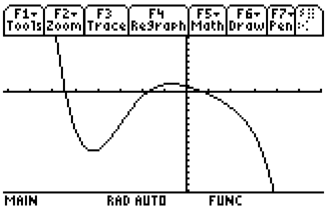
$e^x = Y0 + Y1 + Y2$



$y(x) = Y0 + Y1 - Y2$

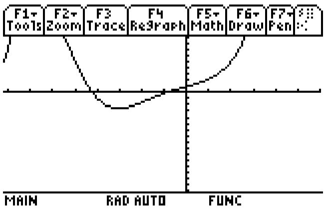


$y(x) = Y0 - Y1 + Y2$

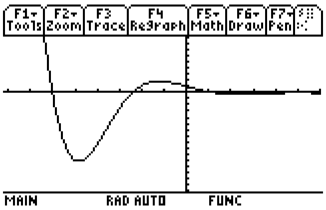


$y(x) = Y0 - Y1 - Y2$

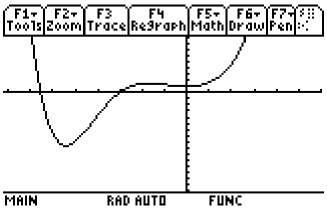
この関数のグラフを見ても簡単な関数にはならないことが分かる.組み合わせはこれだけではない.2個の組で符号の変化を考えることによって,つぎの6個の関数も調べることが必要である.



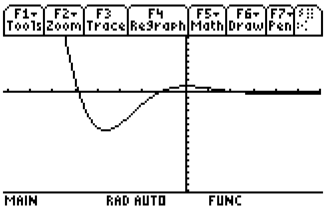
$y(x) = Y0 + Y1$



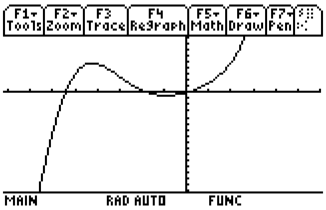
$y(x) = Y0 - Y1$



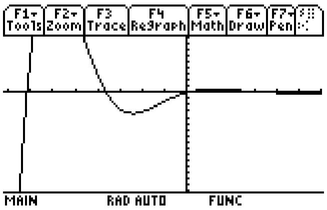
$y(x) = Y0 + Y2$



$y(x) = Y0 - Y2$



$y(x) = Y1 + Y2$



$y(x) = Y1 - Y2)$

この方法では既知の関数を見つけることはできなかった．おそらく係数に 1 とは異なる数値が付くのかもしれない．しかし，一つ一つ作ることは得策ではないと考えた．残念ながら不思議と思う関数にはめぐり合わなかった．

（4） 4 回で元に戻る関数

1 回で元に戻る関数を（mod 4）を用いて 4 つに分ける．

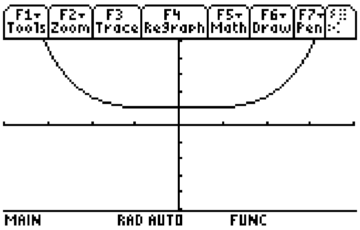
$Y0 = 1 + 1/4!\, X^4 + 1/8!\, x^8 + 1/12!\, x^{12} + \cdots\cdots + 1/(4n)!\, x^{4n} + \cdots$

$Y1 = x + 1/5!\, x^5 + 1/9!\, x^9 + 1/13!\, x^{13} + \cdots\cdots + 1/(4n+1)!\, x^{(4n+1)} + \cdots$

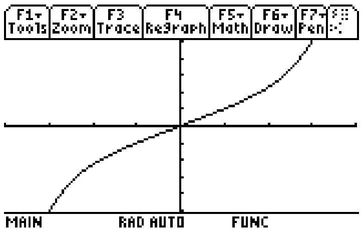
$Y2 = 1/2!\, x^2 + 1/6!\, x^6 + 1/10!\, x^{10} + 1/14!\, x^{14} + \cdots\cdots + 1/(4n+2)!\, x^{(4n+2)} + \cdots$

$Y3 = 1/3!\, X^3 + 1/7!\, x^7 + 1/11!\, x^{11} + 1/15!\, x^{15} + \cdots\cdots + 1/(4n+3)!\, x^{(4n+3)} + \cdots$

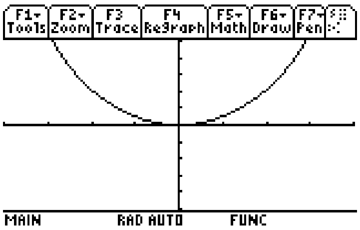
この関数のグラフを示すと次のような概形になる. この 4 つの関数に該当する既知関数はない.



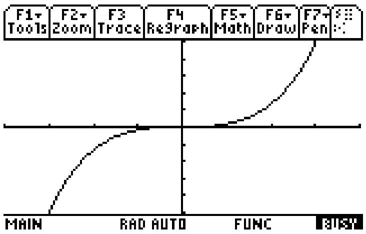
$Y0=1+1/4!X^4+1/8!X^8+\cdot\cdot$



$Y1＝x+1/5!X^5+1/9!X^9+\cdot\cdot$

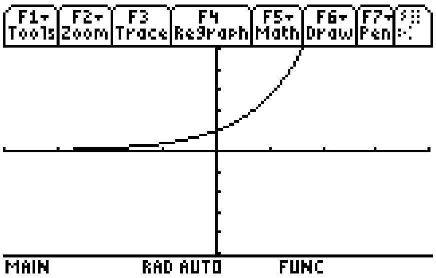


$Y2=1/2!x^2+1/6!X^6 +1/10!X^{10}+\cdot\cdot$



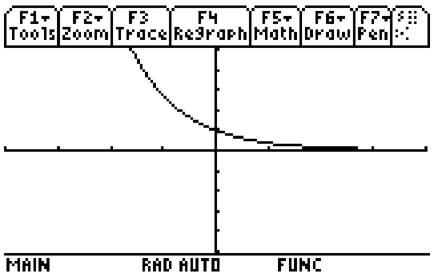
$Y3=1/3!x^3+1/7!X^7 +1/11!X^{11}+\cdot\cdot\cdot$

この 4 個の関数の組み合わせを考える．良く知られた関数はつぎの 4 個である.



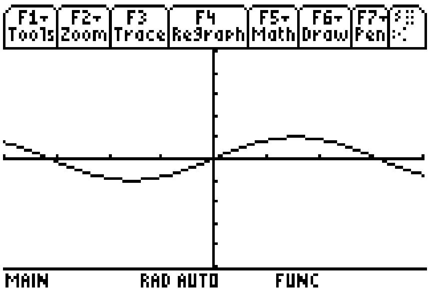
Y0+Y1+Y2+Y3＝ e^{x}

(偶数部分 y 11＋ y 13)＋(奇数部分 y 12＋ y 14)

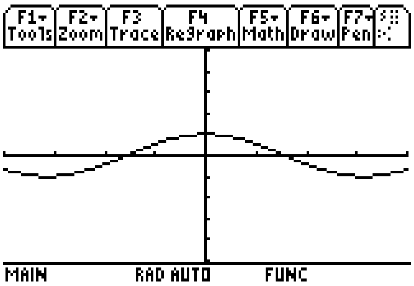


Y0－Y1＋Y2－Y3＝ e^{-x}

(偶数部分 y 11＋ y 13)－(奇数部分 y 12＋ y 14)



奇数部分 Y1+Y3＝sin(ｘ)



偶数部分 Y0－Y2＝cos(ｘ)

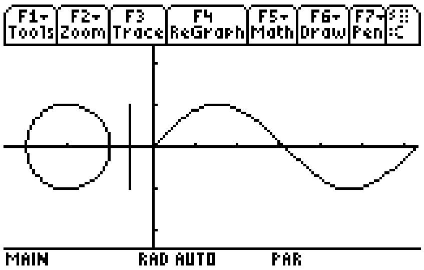
1 回で元に戻る関数を 2 つの方法で分ける

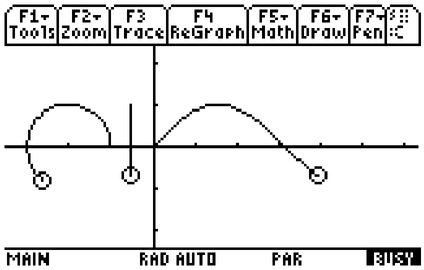
この二つの組み合わせによって 4 回微分したら元に戻る関数が作れる

$y ＝1 + x + 1/2!\, x^2 + 1/3!\, x^3 +1/4!\, x^4 +\cdots\cdots + 1/n!\, x^n + \cdots ＝ e$

（1）次数の偶数奇数で分ける

（2）符号の＋，－の交互性で分ける



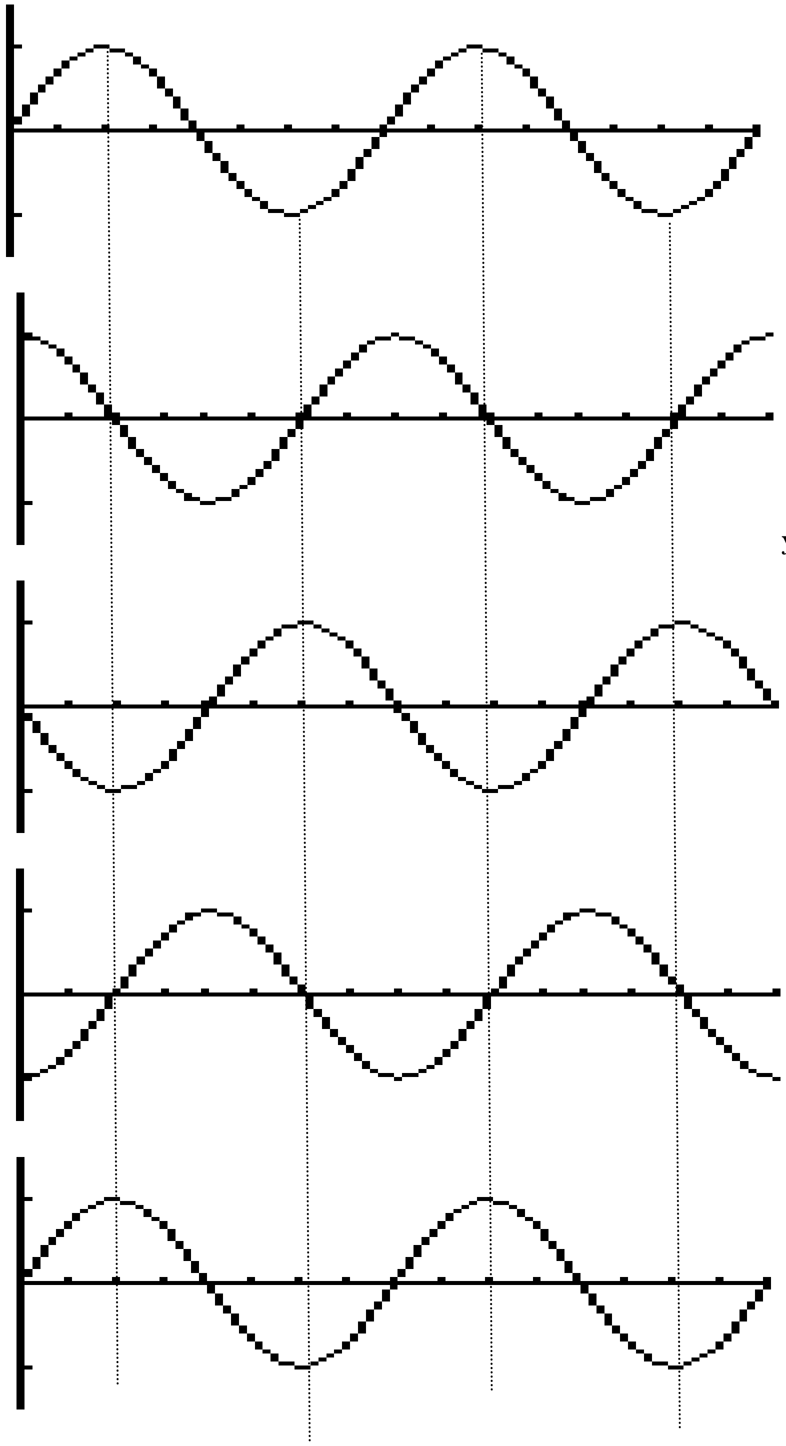


単位円周上を左回りに一定速度で歩く

常に左側の動きを真横に見て直線上を歩く

直線上を歩く位置を示すグラフ

この実験の歩いた時の距離のグラフから速度のグラフを作る.



y=sin x

y=cos x

y ＝－sin x

y=－cos x

y=sin x

4 回微分した結果元に戻ることが分かる．

$$\begin{tikzcd} \sin(x) \arrow[r] & \cos(x) \arrow[d] \\ -\cos(x) \arrow[u] & -\sin(x) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

（５） n 回で元に戻る関数

n 回微分した時に元に戻る関数は関必ず n 個存在することを述べた．この方法は 1 回微分した時同じになる関数を基本として mod　n で分類すればよい．また，表現の方法はいくつかあっても一次独立な n 個の存在もわかる，次の定理を得る．

定理　n 回微分したら元に戻る関数は必ず n 個存在する

この定理は n 回微分すると元に戻る関数は，微分方程式 $y^{(n)} = y$ の解を求めることであり，この解の独立した関数は n 次方程式 $D^n=1$ を解くことでもある．この方程式の解の個数は代数学の基本定理によって，n 個であることが知られている．