指数･対数　今年の後楽館の授業から　第二部

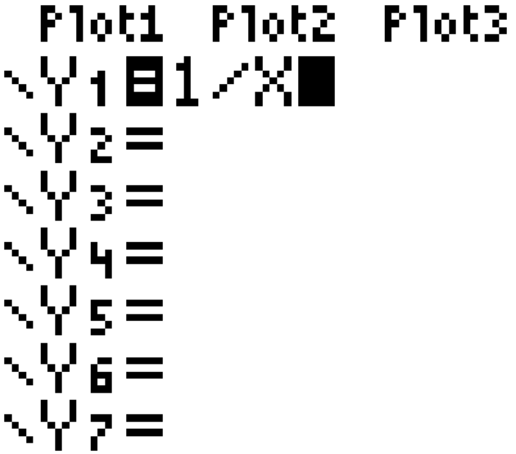
ｅの導入　１／ｘ　の積分を探る

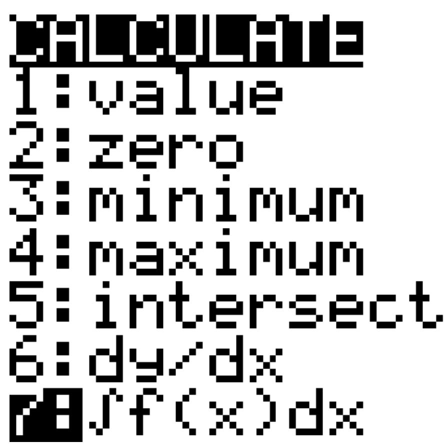
〜そして対数は、元々自然対数だった〜

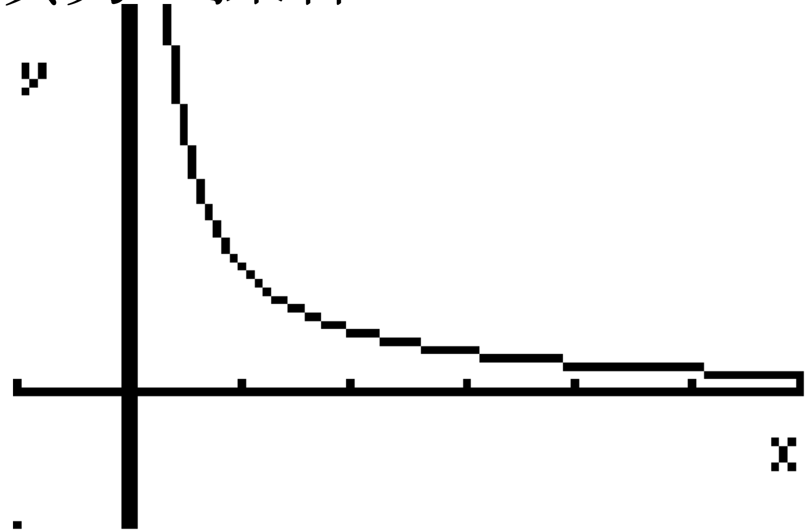
グラフ電卓キーボード

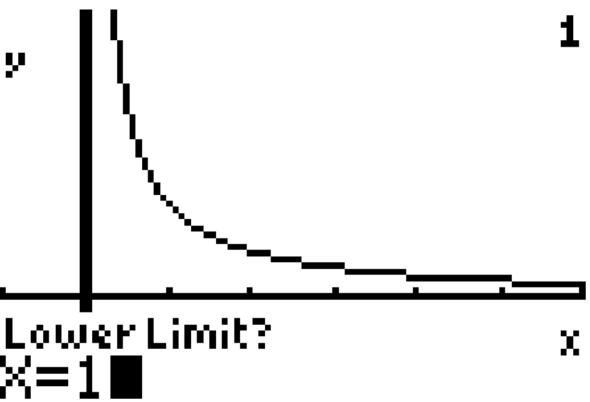

STAT PLOT
Y=
TBLSET
WINDOW
FORMAT
ZOOM
CALC
TRACE
TABLE
GRAPH
2nd
QUIT
MODE
INS
DEL
A-LOCK
ALPHA
LINK
X,T,θ,n
LIST
STAT
TEST A
MATH
ANGLE B
MATRX
DRAW C
PRGM
DISTR
VARS
CLEAR
FINANCE D
x⁻¹
SIN⁻¹ E
SIN
COS⁻¹ F
COS
TAN⁻¹ G
TAN
π H
^
√ I
x²
EE J
,
{ K
(
} L
)
e M
÷
10ˣ N
LOG
u O
7
v P
8
w Q
9
[R
×
eˣ S
LN
L4 T
4
L5 U
5
L6 V
6
] W
—
RCL X
STO▶
L1 Y
1
L2 Z
2
L3 θ
3
MEM
+
OFF
ON
CATALOG
0
i
.
ANS ?
(—)
ENTRY SOLVE
ENTER

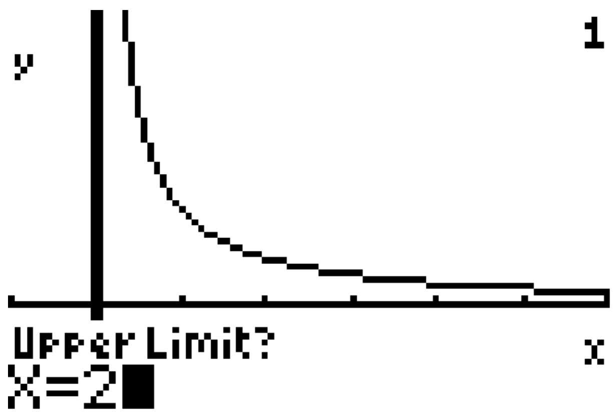
グラフ電卓で定積分　操作











$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

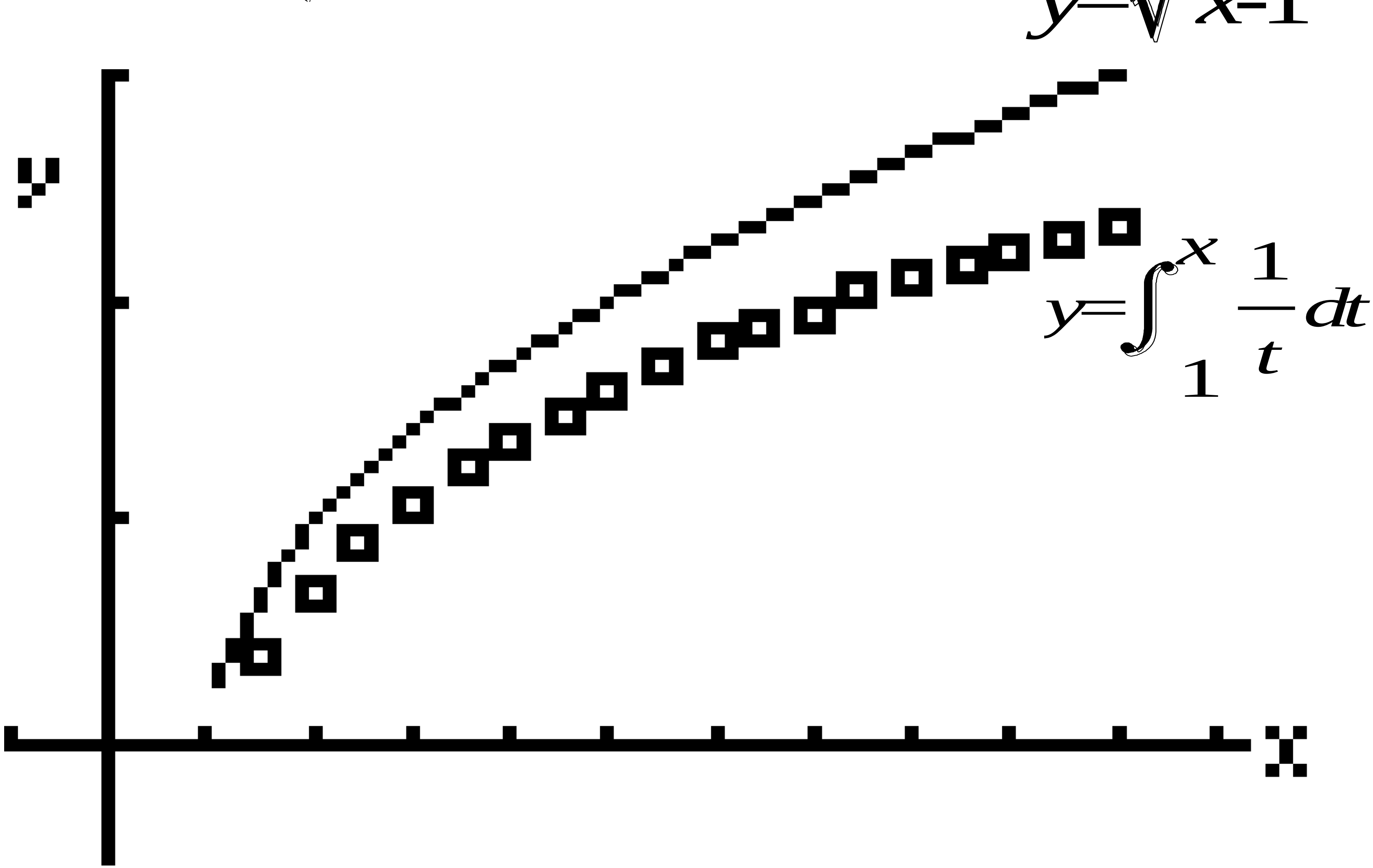
グラフ電卓で定積分

積分範囲の上端	積分の値	積分範囲の上端	積分の値
L1 (x)	L2	L1 (x)	L2
1.5	0.405465	6.0	1.791760
2.0	0.693147	6.5	1.871802
2.5	0.916291	7.0	1.94591
3.0	1.098612	7.5	2.014903
3.5	1.252763	8.0	2.079442
4.0	1.386294	8.5	2.140066
4.5	1.450408	9.0	2.197225
5.0	1.609438	9.5	2.251292
5.5	1.704748	10.0	2.302585

$\sqrt{x-1}$ と比較

積分範囲 L1 (x)	積分の値 L2	$\sqrt{x-1}$	積分範囲 L1 (x)	積分の値 L2	$\sqrt{x-1}$
1.5	0.4055	0.7071	6.0	1.7918	2.2361
2.0	0.6931	1.0	6.5	1.8718	2.3452
2.5	0.9163	1.2247	7.0	1.9459	2.4495
3.0	1.0986	1.4142	7.5	2.0149	2.5495
3.5	1.2528	1.5811	8.0	2.0794	2.6458
4.0	1.3863	1.7321	8.5	2.1401	2.7386
4.5	1.4504	1.8708	9.0	2.1972	2.8284
5.0	1.6094	2	9.5	2.2513	2.9155
5.5	1.7047	2.1213	10.0	2.3026	3

$\sqrt{x-1}$　と比較　グラフ



対数による線形化

$$y^m = x^n$$

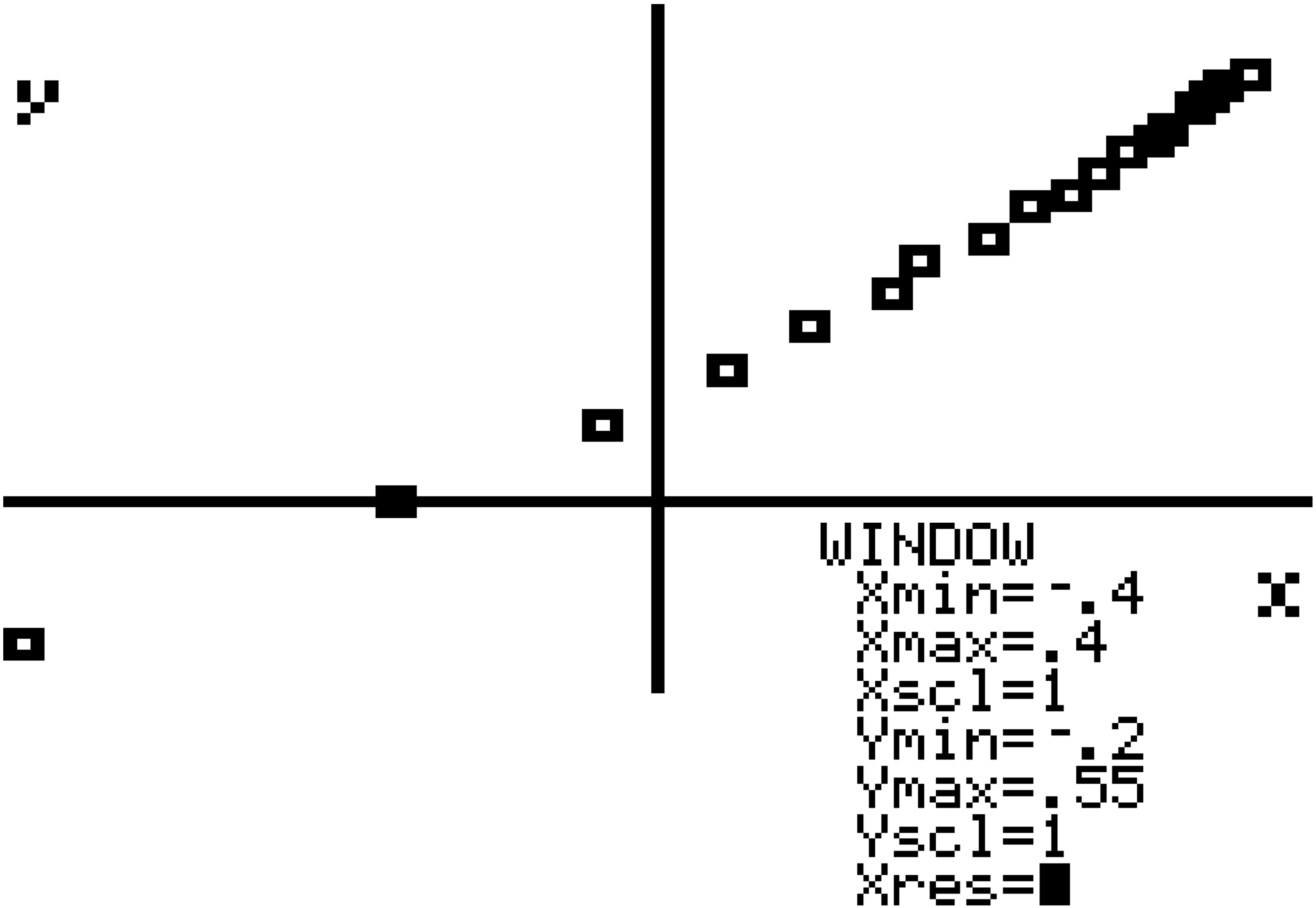
$$\log_a y^m = \log_a x^n$$

$$m \log_a y = n \log_a x$$

$$\log_a y = \mathrm{Y}, \log_a x = \mathrm{X}$$ とおくと

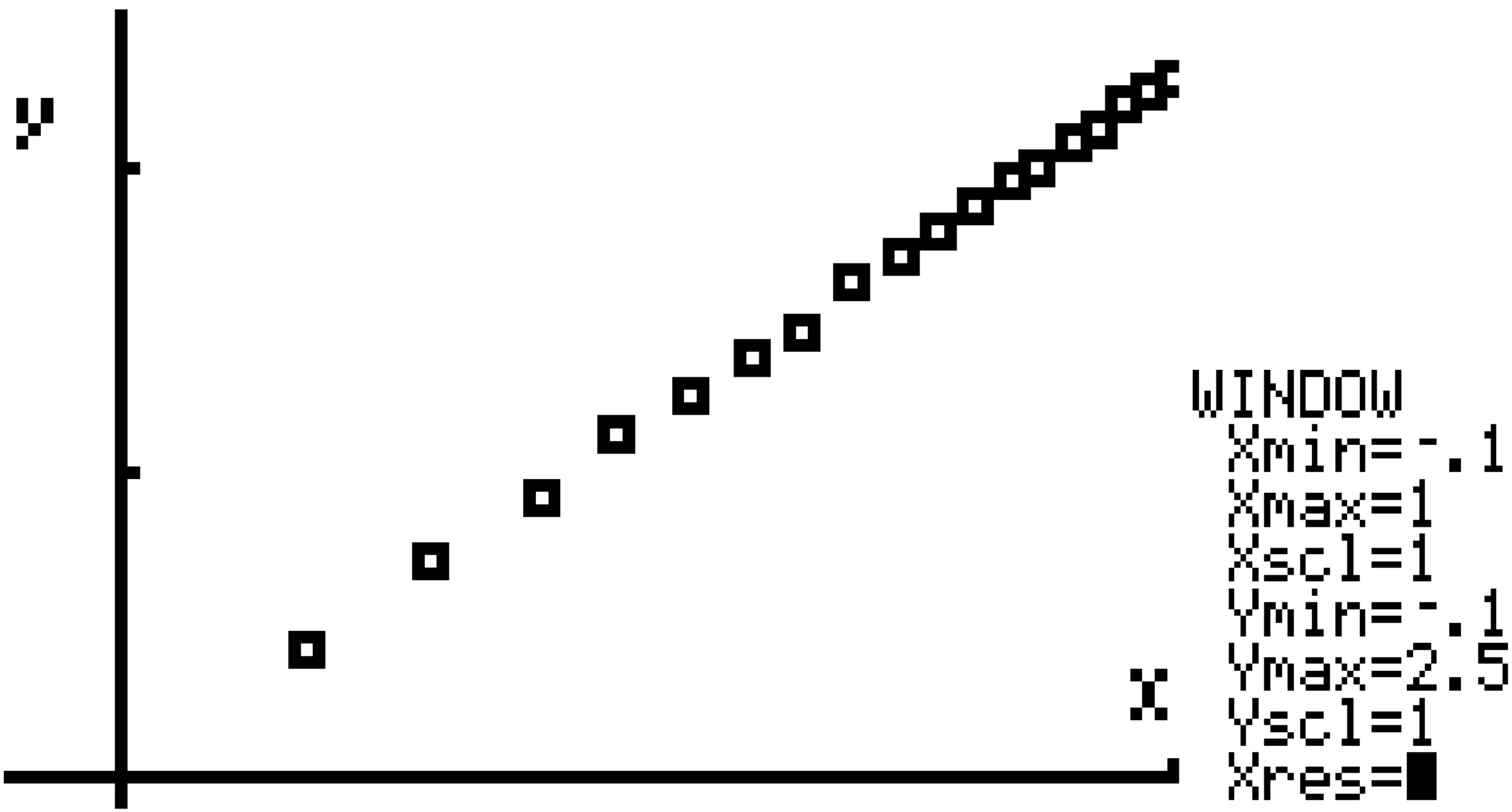
$$\mathrm{Y} = \frac{n}{m}\,\mathrm{X}$$

$\sqrt{x-1}$ と比較　対数を取ったグラフ



積分範囲 L1 x	積分の値 L2 y	xの対数 L3 logx	yの対数 L4 logy
1.5	0.405465	0.17609	-0.39205
2.0	0.693147	0.30103	-0.15917
2.5	0.916291	0.39794	-0.03797
3.0	1.098612	0.47712	0.040844
3.5	1.252763	0.54407	0.097869
4.0	1.386294	0.60206	0.141855
4.5	1.450408	0.65321	0.16149
5.0	1.609438	0.69097	0.206674
5.5	1.704748	0.74036	0.23166
6.0	1.791760	0.77015	0.25328
6.5	1.871802	0.81291	0.27226
7.0	1.94591	0.8451	0.289123
7.5	2.014903	0.87506	0.304254
8.0	2.079442	0.90309	0.317947
8.5	2.140066	0.92942	0.330427
9.0	2.197225	0.95424	0.341874
9.5	2.251292	0.97772	0.352432
10.0	2.302585	1.00000	0.362216

L3: logx (x軸)とL2 : y (y軸)のグラフ
y=2.302 logx



０＜ｘ＜１の値は？

積分範囲 L1 (x)	積分の値 L2	積分範囲 L1 (x)	積分の値 L2
0.9	-0.0458	0.01	-2
0.8	-0.0969	0.001	-3
0.7	-0.1549	0.0001	-4
0.5	-0.3010	0.00001	-5
0.4	-0.3979	0.00001	-6
0.3	-0.5229	0.000001	-7
0.2	-0.6990	0.0000001	-8
0.1	-1	0.00000001	-9

この積分が対数の性質を持つとは

$$\int_1^{ab} \frac{1}{t}dt = \int_1^{a} \frac{1}{t}dt + \int_1^{b} \frac{1}{t}dt$$

積分の性質から

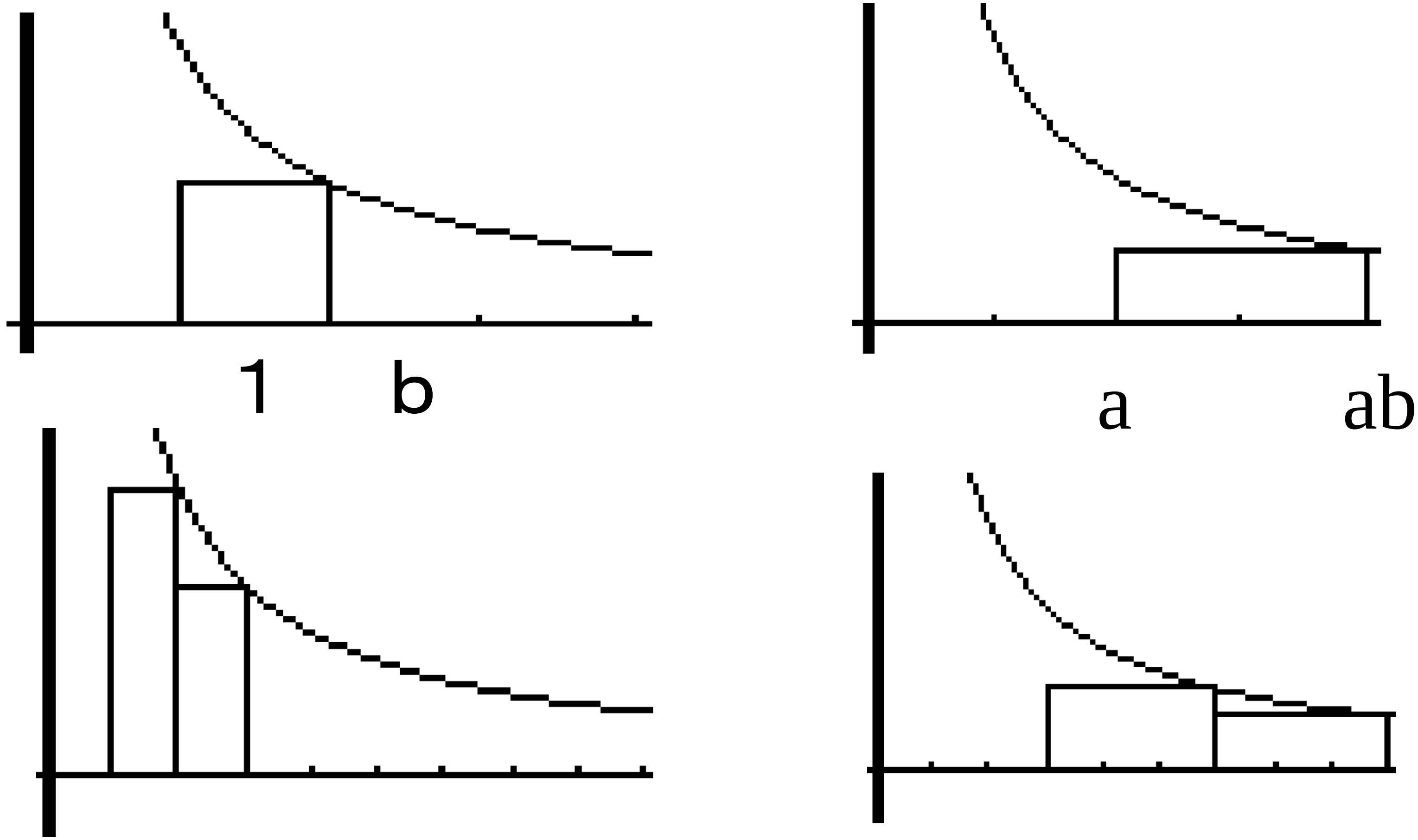
$$\int_1^{ab} \frac{1}{t}dt = \int_1^{a} \frac{1}{t}dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$$

したがって　対数の性質を持つとは

$$\int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^{b} \frac{1}{t} dt$$

がなりたつということである。

なぜ対数になるのか　反比例のグラフから



区分求積で

下から近似

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}(x-1)}\times\frac{x-1}{n} \qquad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a\left(1+\frac{k}{n}(x-1)\right)}\times\frac{a(x-1)}{n}$$

上から近似

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}(x-1)}\times\frac{(x-1)}{n} \qquad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a\left(1+\frac{k}{n}(x-1)\right)}\times\frac{a(x-1)}{n}$$

置換積分なら一瞬

$$\int_{a}^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_{1}^{b} \frac{1}{X/a} \frac{dX}{a} = \int_{1}^{b} \frac{1}{X} dX$$

対数がすっきり表せる底の値は？

y=2.302 logx　が
y= log$_a$x　と表せるaの値を求めよう

底の変換公式で

$$\frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} = 2.302 \log_{10} x$$

$$\log_{10} a \fallingdotseq \frac{1}{2.302} \quad \star \quad a = 10^{(1/2.302)}$$

これから $a \fallingdotseq 2.7182819$

対数の微分は1／x

この値 $a \fallingdotseq 2.7182819$ を e で表す。

すると積分の逆演算は微分であるから

$$\frac{d(\log_e x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

定義に従って微分すると

定義に従って微分すると

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_e\frac{(x+h)}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_e(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

これが $\dfrac{1}{\mathrm{x}}$ になりますから $\lim_{h\to 0}(1+\dfrac{h}{x})^{\frac{x}{h}}=e$

これは $n=\dfrac{h}{x}$ とおくと $\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{n}$ の極限が e ということです。

しかし、まだ自然というには、ひっかかる？対数の原理に戻って

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

11	12	13	14	15
2048	4096	8192	16384	32768

128×512＝　65536

32768÷64＝　512

刻みを細かくし、対数表を完成

底 a	loga2
2	1
1.1	7.27
1.01	69.67
1.001	693.50
1.0001	6931.81
1.00001	69315.06

より精度の高い対数表を作るために
対数の刻みを細かくしていくことを考える

$$1.01^{(10\times 6.967)} \fallingdotseq 1.001^{(100\times 6.9350)} \fallingdotseq 1.0001^{(1000\times 6.93181)}$$

$$\fallingdotseq 1.00001^{(10000\times 6.931506)}$$

e　は理想的な底

10のべき乗を底の方に、繰り込んでいくと

$(1.01^{10})^{6.967} \fallingdotseq (1.001^{100})^{6.9350} \fallingdotseq (1.0001^{1000})^{6.93181}$
$\fallingdotseq (1.00001^{10000})^{6.931506}$

この底の極限が　$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

ご静聴　ありがとうございました。

e　は、理想的で自然な対数の底だった

- 歴史的には、ネピアがはじめて作った対数は、大きい方から、細かくしていったもので、近似的に1/e が底だったようです。

  その少し後のﾋﾞｭﾙｷﾞ (ﾌﾞﾚｷﾞｰ) が作った対数はほぼ e が底だったということです。

  (参考文献参照)

- 参考文献

「数の大航海」志賀浩二　日本評論社

「THE STORY OF a NUMBER」

ELI　MAOR　Princeton University Press