福井高専グラフ電卓研究会(2014.6.28)

$x^{2n}-x^ny^n+y^{2n}$ の因数分解と問題解決

渡辺信
公益財団法人日本数学検定協会／生涯学習数学研究所
longlifemath@gmail.com

１. 数学問題は数学か

数学の問題としてわれわれが接するのは

次の因数分解をしなさい　　$x^{10}-x^5y^5+y^{10}$

という形である。この問題を考えるのは難しい。

解答を作るためには今まで知っている知識を使って、類似な問題を解いたことがあるかを考える。また、10 次式の時数をいかにして下げるかを検討して $x^5=X$ とおくなどの処置を考えるかもしれない。解法を考えるということは、今までの経験が大きくものを言う。

ある人にこの問題を提示したらすぐに答えが返ってきた。数学ソフトを使うといとも簡単に答えを出してくれたという。数学ソフトが使えるならばこの問題は面白い問題ではないというコメント付であった。TI-89 で試してみたら

$(x^2-xy+y^2)(x^8+x^7y-x^5y^3-x^4y^4-x^3y^5+xy^7+y^8)$

と、一舜に求められる。Technology の活用を認めれば、この問題は「数学問題」という話ではない。それでは、Technology を使わないで解くことができるか・・・と苦し紛れの会話になる。Technology を使わなかったら難しい問題かどうかと確かめた。Technology を使ってもよいということになれば、問題は変わってくる。ｎによっての場合分けを問うことになるときその答えはどうなるであろうか。

次の因数分解をしなさい　　$x^{2n}-x^ny^n+y^{2n}$

２. 問題 $x^{10}-x^5y^5+y^{10}$ はどのようにして作られたか

既知とすることと y=1 としてもよい。

次の５次までの因数分解は既知とする、

$x+1$

x^2+1

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

x^4+1

$x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

この因数分解を考えたこともきっかけがある。$x+1$、x^2+1 が因数分解できないと言ったときに、それでは x^3+1 も因数分解できないと思った人がいたことである。そこで x^n+1 の因数分解を試みることにした。ここでも Technology の活用は有用であった。次の予想はすぐに発見できた。

発見した予想　　x^n+1 の n が奇数のときは（$x+1$）を因数として持つ

この予想は因数定理を知っていれば予想ではないが、Technology が示した結果を並べて発見できたことは数学への第一歩を踏み出したことになる。

因数定理　　x^n+1 の n が奇数のときは($x+1$)を因数として持つ

初めの 5 つの既知とした因数分解の結果を用いることによって、公式や Technology を用いることなく因数分解をすることができる。方法としては　$X=((x^m+1)^{奇数}+1)$ の形にして既知の因数分解に持ち込むことにする。

$x^6+1=(X+1)(X^2-X+1)=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

$x^7+1=(x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

x^8+1

$x^9+1=(x^3+1)(x^6-x^3+1)=(x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)$

$x^{10}+1=(x^2+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)$

$x^{11}+1=(x+1)(x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

$x^{12}+1=(x^4+1)(x^8-x^4+1)$

$x^{13}+1=(x+1)(x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

$x^{14}+1=(x^2+1)(x^{12}-x^{10}+x^8-x^6+x^4-x^2+1)$

ここまでは因数分解は一通りの考え方しかなかった。しかし、$n=15$ の時に次の 3 通りの方法がある。

$$
\begin{aligned}
x^{15}+1&=(x+1)(x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)\\
&=(x^5+1)(x^{10}-x^5+1)=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^{10}-x^5+1)\\
&=(x^3+1)(x^{12}-x^9+x^6-x^3+1)=(x+1)(x^2-x+1)(x^{12}-x^9+x^6-x^3+1)
\end{aligned}
$$

$x^{16}+1$

指数 n を増やしていくことが新しい問題を作り出すかはわからない。とりあえず面白そうな因数分解を続けることによって $n=16$ まで行った結果から予想を発見できそうである。

(0)因数定理を使うと奇数のときは因数分解できる。

(1) $n=2^m$のときは因数分解はできない。

(2) n が素数のときは因数分解の型は決まる。

(3) n が奇数×奇数になるときは２通りの方法がある。

３．因数分解の一意性から $x^{10}-x^5+1$ の因数分解ができる

$$
\begin{aligned}
x^{15}+1&=(x+1)(x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)\\
&=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^{10}-x^5+1)\\
&=(x+1)(x^2-x+1)(x^{12}-x^9+x^6-x^3+1)
\end{aligned}
$$

この3通りの結果を比較して次のことが分かる。変形することによって(x^2-x+1)を因数にもつことが分かる。

$$(x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$$
$$=(x^{14}-x^{13}+x^{12})-(x^{11}-x^{10}+x^9)+(x^8-x^7+x^6)-(x^5-x^4+x^3)+(x^2-x+1)$$
$$=x^{12}*(x^2-x+1)-x^9*(x^2-x+1)+x^6*(x^2-x+1)-x^3*(x^2-x+1)+(x^2-x+1)$$
$$=(x^2-x+1)(x^{12}-x^9+x^6-x^3+1)$$

この結果から$(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^{10}-x^5+1)$も$(x^2-x+1)$を因数として持つことがわかる。$(x^4-x^3+x^2-x+1)$は因数分解できない。よって、$(x^{10}-x^5+1)$は$(x^2-x+1)$を因数として持つことが分かる。この結果は因数分解の一意性からも説明ができる。

因数分解の一意性定理　因数分解の結果はすべて同じになる

$$x^{15}+1=(x+1)(x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)(x^{12}-x^9+x^6-x^3+1)$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)$$

因数分解の結果を比較することによって、

$$(x^{10}-x^5+1)=(x^2-x+1)(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)$$
$$(x^{12}-x^9+x^6-x^3+1)=(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)$$

4.「数学の問題」と「数学の思考」　($x^{2n}-x^n+1$ の因数分解)

$x^{2n}-x^n+1$ の因数分解の問題は、(x^2-x+1)を因数に持つことを調べればよいということから、複素数を活用することによって解決した。$x^2-x+1=0$ の解 $\omega=1/2+\sqrt{3}/2\, i$ を考える。$\omega^6=1$ より

	n＝0	1	2	3	4	5
$\omega^{2n}-\omega^n+1$	1	0	$1+\sqrt{3}\,i$	3	$1-\sqrt{3}\,i$	0

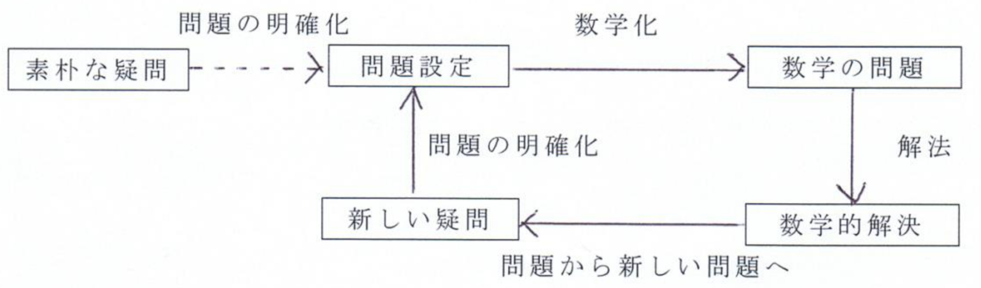
よって$(x^{2n}-x^n+1)$は$n\equiv\pm1 \pmod 6$のとき、(x^2-x+1)を因数として持つことが分かる。

整数係数の範囲で因数分解に複素数までの解を用いることによって因数分解を考えることができることは興味深い。

$x^{10}-x^5+1$ の因数分解の解を求めるのであれば、Technology を活用することによって答えは見つかる。$x^{10}-x^5+1$ の因数分解が問題であるならば Technology を使ってはいけない問題である。この問題が発展して $x^{2n}-x^n+1$ の因数分解の可能性を調べる問題に昇華した。この時には残念ながら Technology を使うことはできない。Technology は問題を考える補助的な役割しかない。

なぜ、$(x^{10}-x^5+1)$が因数分解可能かという問題が作り出されたかに興味がある。そして、数学的に解決した新しい問題は、この一般化で$(x^{2n}-x^n+1)$は$n\equiv\pm1 \pmod 6$のとき、(x^2-x+1)を因数として持つということであった。ここに、数学というものがどのようなものかを説明していると思う。Technology では解決不可能なことが数学の本質である。

非常に素朴な疑問 x^3+1 の因数分解から $x^{15}+1$ の3通りの因数分解の表現の違いから $(x^{10}-x^5+1)$ができることの発見、その発見を示すことをしないで新しい問題を作り出して数学は難しいと思わせた。この問題発見から、数学的手法によって解を求めることができる。ここで終わりではなく、似た問題を作り出すことの可能性を考える。



問題解決のサイクル図

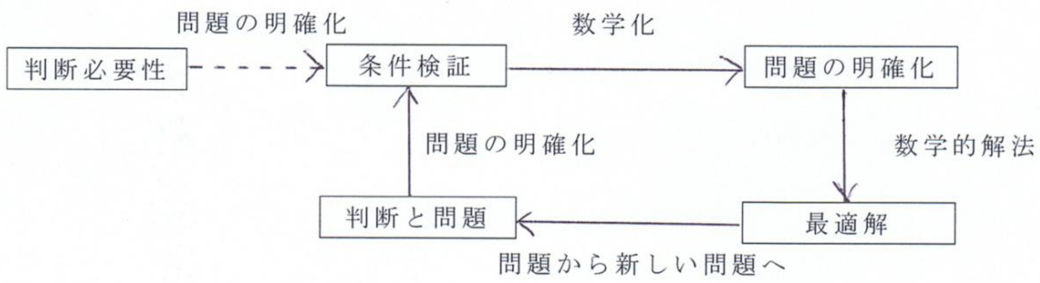
Technology の活用が数学には入りにくいのは、問題として与えられていることを Technology はいとも簡単に解いてしまう。$(x^{10}-x^5+1)$を因数分解するということに対しては

Factor($x^{10}-x^5+1$,x)	$(x^2-x+1)(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)$

しかし、一般に $x^{2n}-x^n+1$ の因数分解という問題には残念ながら Technology では答えられない。ここに数学の問題とは何か、Technology は数学を考える補助にしかならない。しかし、現在の数学と思っていることに対してはほとんどの問題を Technology によって解決できることしか扱っていない。与えられた問題を解く訓練においては、Technology は使ってはいけないということになる。Technology を積極的に使うことによって数学を楽しむことができたら良いのではないか。

５．生涯学習と数学教育

学校制度下での教育を卒業すると、数学教育は形を変えてすべての人々に必要になる。この数学教育が必要になることを「数学は社会で役立つ」と宣伝するが、学校教育で学ぶ知識が直接、社会とは結びつかない。数学的な思考方法を主体的に活かすことができるかを問われる。社会では自らの行動に対して条件を満たす最適解を探し求めなくてはならない。この最適解を求める活動に数学が役に立つ。この意味で数学リテラシーを身につけるだけではなく、おおいに数学を学ぶ必要がある。



生涯学習のサイクル図

問題解決のサイクル図がそのまま生涯学習での主体的判断に適応することから、積極的に数学を学ぶことが、生涯学習にとって重要な役割を演ずると考えてよい。このとき Technology の補助も重要な課題である。