公式集：線形代数

D. 行列と行列式

D-1. 行列

D-1-1 [行列の演算の基本法則]

任意の $m \times n$ 行列 $A,\ B,\ C$ と $m \times n$ 型零行列 O および任意の数 $k,\ l$ に対して

(1)	$A+B=B+A$	交換法則
(2)	$(A+B)+C=A+(B+C)$	結合法則
(3)	$A+O=O+A=A$	
(4)	$A+(-A)=(-A)+A=O$	
(5)	$k(lA)=(kl)A$	結合法則
(6)	$(k+l)A=kA+lA$	分配法則
(7)	$k(A+B)=kA+kB$	分配法則
(8)	$1A=A,\ (-1)A=-A$	
(9)	$0A=O,\ kO=O$	

D-1-2 [行列の積に関する基本法則]

行列 $A,\ B,\ C$ 、単位行列 E 、零行列 O について

(1)	$(AB)C=A(BC)$	結合法則
(2)	$A(B+C)=AB+AC$	分配法則
	$(A+B)C=AC+BC$	分配法則
(3)	$AE=A,\ EA=A$	
(4)	$AO=O,\ OA=O$	

D-1-3 [２次の正方行列の逆行列]

２次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$D=ad-bc$ とおく。このとき

$D \neq 0 \ \Leftrightarrow\ A$ は正則である。そのとき逆行列は $A^{-1}=\dfrac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$D = 0 \ \Leftrightarrow\ A$ は正則でない。すなわち逆行列が存在しない。

D-2. １次変換

D-2-1 [１次変換の線形性]

１次変換 f は任意のベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ と数 k について次の等式を満たす。この性質を **線形性** という。

(1) $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$

(2) $f(k\boldsymbol{x})=kf(\boldsymbol{x})$

逆に、平面上の変換 f が線形性 (1) (2) を満たすとき、f は１次変換である。

D-2-2 [１次変換の行列による表示]

１次変換 f による基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ の像が

$$\boldsymbol{e}'_1=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}'_2=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

であるとき、f は次の行列で表される。$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

D-2-3 [**１次変換の性質（１）**]

平面上の異なる２点を A, B とし、１次変換 f によるそれらの像を A', B' とする。
$A' \neq B'$ ならば直線 AB の f による像は直線 $A'B'$ である。
$A' = B'$ ならば直線 AB 上の点はすべて点 A' に移される。

D-2-4 [**合成変換の行列表示**]

１次変換 f, g の行列を A, B とするとき、積 $g \circ f$ は行列 BA で表される１次変換である。

D-2-5 [**逆変換の存在と行列の関係**]

１次変換 f の行列を A とするとき、
行列 A が正則である $\Longleftrightarrow$ f の逆変換 f^{-1} が存在する。
逆変換 f^{-1} の行列は A^{-1} である。

D-2-6 [**１次変換の性質（２）**]

１次変換 f の逆変換が存在するとき、
(1) 異なる２点は f によって異なる２点に移る。
(2) 平面全体は f によって平面全体に移る。

D-2-7 [**１次変換の性質（３）**]

１次変換 f が逆変換をもつとき、f は
(1) 任意の直線を直線に移す。
(2) 平行な直線を平行な直線に移す。

D-3. 行列式

D-3-1 [**行列式（サラスの方法）**]

２次：$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

３次：$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}$
$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

D-3-2 [**行列式の基本変形**]

(1) 行列式の行と列を入れ換えてもその値は変わらない。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) 行列式の１つの行または列の各成分が２つの数の和の形になっているとき、その行列式は２つの行列式の和で表される。

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3 + a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(3) 行列式の１つの行または列を k 倍して得られる行列式は元の行列式の値の k 倍である。

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(4) 行列式の２つの行または列を交換すれば、その値は符号が変わる。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

D-3-3 [**行列式の性質（１）**]

次の性質を持つ行列式の値はいずれも 0 である。

(1) １つの行または列のすべての成分が 0 である。

(2) ２つの行または列の対応する成分が等しい。

(3) ２つの行または列の対応する成分が比例している。

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & ka_1 \\ a_2 & b_2 & ka_2 \\ a_3 & b_3 & ka_3 \end{vmatrix} = 0$$

D-3-4 [**行列式の性質（２）**]

行列式の１つの行または列の k 倍を他の行または列に加えたり引いたりしても、行列式の値は変わらない。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ka_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + ka_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + ka_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

D-3-5 [**行列式の展開**]

n 次の行列式 $|A|$ の $(i,\ j)$ 成分の小行列式を $D_{i\,j}$ とおくと、

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i\,1}\, D_{i\,1} + (-1)^{i+2} a_{i\,2}\, D_{i\,2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{i\,n}\, D_{i\,n}$$

（第 i 行に関する展開）

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1\,j}\, D_{1\,j} + (-1)^{2+j} a_{2\,j}\, D_{2\,j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{n\,j}\, D_{n\,j}$$

（第 j 列に関する展開）

D-3-6 [**行列式の性質（３）**]

行列式 $|A|$ の１つの行または列の各成分とその余因子との積の和は行列式 $|A|$ に等しい。

１つの行または列の各成分と他の行または列の対応する成分の余因子との積の和は 0 である。

D-3-7 [**行列の積の行列式**]

同じ次数の正方行列 $A,\ B$ と積 AB の行列式について $|AB| = |A|\,|B|$

D-3-8 [**3次の正方行列の行列式**]

正方行列 A が正則である $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$ で与えられる。

大文字 $A_1, B_1, \cdots$ は行列 A の各成分 $a_1, b_1, \cdots$ の余因子を示す。

D-3-9 [**クラメルの公式**]

３次の正方行列を係数にもつ連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ において、$|A|$ の第 j 列を $\boldsymbol{p}$ で置き換えて得られる行列式を Δ_j とおく。$(j = 1,\ 2,\ 3)$

このとき、$|A| \neq 0$ ならば連立方程式の解は　$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{|A|},\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{|A|},\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{|A|}$

D-4. 行列の固有値と対角化

D-4-1 [**２個の連立同次１次方程式**]

３つの変数 x, y, z について２個の連立同次１次方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$
の係数の中に 0 でないものがあるとする。$a_1 \neq 0$ とするとき、

(1)　行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ がすべて 0 ならば

$a_2x + b_2y + c_2z = k(a_1x + b_1y + c_1z)$ と表される。k は定数である。

(2)　上の３つの２次の行列式の中に 0 　でないものがあれば、

$$x : y : z = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

D-4-2 [**３個の連立同次１次方程式**]

連立同次１次方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$
が少なくとも１つは 0 でないような解 x, y, z をもつための必要十分条件は、$|A| = 0$ である。ただし、A は係数行列である。

D-4-3 [**行列の固有方程式、固有値、固有ベクトル**]

連立方程式 $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \cdots (1)$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解をもつための必要十分条件は、 $|A - \lambda E| = 0 \cdots (2)$ が成り立つことである。この方程式 (2) を行列 A の **固有方程式** といい、その解を行列 A の **固有値** という。１つの固有値 λ_i に対して、方程式 (1) で $\lambda = \lambda_i$ として得られる解ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ を行列 A の固有値 λ_i に属す **固有ベクトル** という。

D-4-4 [**行列の対角化**]

３次の正方行列 A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ がすべて実数で互いに異なれば、それぞれの固有値に属す $\mathbf{0}$ でない固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ とするとき、

行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ は正則であり、行列 A は P

によって次の対角行列に変換される。$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

D-4-5 [**対称行列と直交行列**]

$m \times n$ 型行列 $A = (a_{ij})$ の行と列を入れ換えた $n \times m$ 型行列を A の **転置行列** といい、 ${}^tA$ で表す。とくに、正方行列 A が ${}^tA = A$ であるとき、 A を **対称行列** という。

また正方行列 P に対して、${}^tP = P^{-1}$ すなわち ${}^tPP = E,\ P{}^tP = E$ であるとき、 P を **直交行列** という。

D-4-6 [**対称行列の固有値、固有ベクトル、対角化**]

対称行列 A の固有値はすべて実数である。異なる固有値に属す固有ベクトルは互いに垂直である。

固有値が固有方程式の重解であるとき、その固有値に属す固有ベクトルで互いに垂直なものを重複度の個数だけ選ぶことができる。

３次の対称行列 A の固有値を重複する場合も含めて $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とし、このようにして選んだ単位固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ とするとき、$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$ は直交行列であり、A は P によって次のように対角化される。${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

D-5. **１次従属・１次独立と行列の階数**

D-5-1 [**ベクトルの１次従属・１次独立**]

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が１次従属である $\iff$ そのうち１つが残りのベクトルの１次結合として表される

空間の３個のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が１次従属である $\iff$ $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = 0$

１次独立である $\iff$ $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} \neq 0$

D-5-2 [**連立１次方程式と係数行列、拡大係数行列の階数**]

連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列を $\widetilde{A}$ とするとき、

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つ $\iff$ $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\widetilde{A}$