複素関数論（１１）コーシーの積分定理

クラス＿＿＿＿＿＿＿　＿＿＿＿＿番　名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+3}$ の、次の曲線に沿う積分の値を求めよ。

(1) $C : |z - 2i| = \dfrac{1}{2}$

ヒント：図をかき、閉曲線 C の内部にある正則でない点を見つける。
$\dfrac{1}{z^2+3}$ を部分分数分解する。コーシーの積分定理と「$2\pi i$ の定理」を使う。

答え：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

(2) C : 原点を中心とする単位円の上半分に沿って -1 から 1 までに至る曲線

ヒント：図をかき、実軸に沿って、$z = -1$ から $z = 1$ に至る線分を C_1 とすれば、
曲線 $C_1 + (-C)$ は単一閉曲線となる。

$\displaystyle\int_{C_1+(-C)} f(z)\, dz$ に、コーシーの積分定理 I を適用する。

$$\int_{C_1+(-C)} = \int_{C_1} + \int_{(-C)} = \int_{C_1} - \int_{C}$$

$\displaystyle\int_{C_1} f(z)\, dz$ を求めればよい。

答え：$\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

2. 次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{z}{z^2+1} = \dfrac{a}{z-i} + \dfrac{b}{z+i}$ を満たす定数 $a,\ b$ を求めよ。

答え： $a = \dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{z}{z^2+1}dz$ の値を求めよ。ただし、原点を中心とする半径 2 の円を C とする。

ヒント：図をかく。C の内部に、$z=i,\ z=-i$ をそれぞれ中心とした小さな円をかき、それらを $C_1,\ C_2$ とする。この状態で、コーシーの積分定理 II を適用する。
さらに、（1）を用いてコーシーの積分定理 I および「$2\pi i$ の定理」を用いて計算する。

答え：$2\pi i$