複素関数論（１２）コーシーの積分表示・グルサの公式

クラス＿＿＿＿＿＿＿＿ ＿＿＿＿＿＿番 名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 曲線 $C: |z| = 2$ （正の向き）として、次の積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{3z+\pi}dz$

ヒント：分母を $z-\alpha$ の形にしておく。コーシーの積分表示 I(1) を使う。

答え：$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi i$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{z}{(z+1)(z-3)}dz$

ヒント：正則でない点（分母を 0 にする点）のうち、曲線 C の内部にあるのもを α とする。
$\dfrac{f(z)}{z-\alpha}$ の形にし、コーシーの積分表示 I(1) を使う。

答え：$\dfrac{\pi}{2}i$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2+1}dz$

ヒント：$\dfrac{1}{z^2+1}$ を部分分数分解し、それぞれにコーシーの積分表示 I(1) を使う。

答え：$\pi(e^i - e^{-i}) = 2\pi i \sin 1$

2. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{(z+2i)(2z+i)}dz$ の値を求めよ。

ヒント：正則でない点（分母を 0 にする点）のうち、$|z| = 1$ の内部にあるものに対して、
コーシーの積分表示を使う。$\dfrac{f(z)}{z-\alpha}$ の形に変形する。

答え：$\dfrac{2}{3}\pi$

3. 曲線 $C : |z| = 2$ （正の向き）として、次の積分の値を求めよ。

ヒント：正則でない点（分母を 0 にする点）が曲線の内部にあることを確かめる。
適当な関数を $f(z)$ とおき、コーシーの積分表示 II（グルサの公式）を使う。
n を正しく見つける。丁寧に解答すること。

(1) $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{(z-1)^3}\,dz$

答え：$2\pi i$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{(z-i)^4}\,dz$

答え：$\dfrac{\pi}{3e}$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{(z-3)(z+i)^2}\,dz$

ヒント:正則でない点のうち、曲線 C の内部にあるものを特定する。
$f(z)$ をどうおけばよいかを考える。
答え：$-\dfrac{(8+19i)e^{-i}\pi}{25}$