複素関数論（１３）関数の展開

クラス＿＿＿＿＿＿＿ ＿＿＿＿＿番 名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 次の関数のマクローリン展開と、その収束半径 R の値をかけ。一般項も書くこと。

(1) $\dfrac{1}{1-z}$

答え：略　$R=1$

(2) e^z

答え：略　$R=\infty$

(3) $\sin z$

答え：略　$R=\infty$

(4) $\cos z$

答え：略　$R=\infty$

2. $\dfrac{1}{1-z}$ のマクローリン展開を参考にし、次の関数のマクローリン展開を求めよ。また、収束半径 R も求めよ。

(1) $f(z)=\dfrac{2i}{2-z}$

ヒント：$f(z)=\dfrac{i}{1-\frac{z}{2}}$ と変形する。

答え：$f(z)=i+\dfrac{i}{2}z+\dfrac{i}{4}z^2+\cdots+\dfrac{i}{2^n}z^n+\cdots$　$R=2$

(2) $f(z)=\dfrac{e}{1+z^2}$

ヒント：$\dfrac{1}{1+z}$ の展開の z を z^2 に置き換える。

答え：$f(z)=e-ez^2+ez^4-\cdots+(-1)^n ez^{2n}+\cdots$　$R=1$

3. 関数 $f(z)$ は単一閉曲線 C の周および内部で正則であるとする。このとき、$f(z)$ を C の内部の任意の点 α を中心としたテーラー展開で表し、$\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\ dz$ に用いることで、コーシーの積分表示 I を導け。

ただし、テーラー展開された関数において、項別積分を認める。(収束半径も同じである。)

(解答のヒント)

テーラー展開より、$\displaystyle f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$ が成り立つ。

よって、$\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\ dz=\int_C \frac{1}{z-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n\ dz$

であるので、右辺を変形し、項別に積分する。

$f^{(0)}(\alpha)=f(\alpha),\ 0!=1$ に注意して、最終的には

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\ dz=f(\alpha)\int_C \frac{1}{z-\alpha}dz+f'(\alpha)\int_C dz+\frac{f''(\alpha)}{2!}\int_C (z-\alpha)\ dz+\cdots$$
$$\cdots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}\int_C (z-\alpha)^n\ dz+\cdots$$ となる。

<u>(注意)ここの変形を丁寧にする。</u>

$2\pi i$ の定理と、コーシーの積分定理から $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-\alpha}\ dz=2\pi i,\quad \int_C (z-\alpha)^n\ dz=0$ より、
コーシーの積分表示 I を導く。