

複素関数論（１４）ローラン展開

クラス

番 名前

例題：次の関数を（ ）内の値を中心とするローラン展開を求めよ。

$$(1) f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} \quad (z=1)$$

（解法） $z-1=u$ とおいて、 u のべき乗で展開する。

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{(z-1)^2} &= \frac{e^{u+1}}{u^2} = \frac{e}{u^2} e^u \\ &= \frac{e}{u^2} \left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + \cdots \right) \\ &= \frac{e}{u^2} + \frac{e}{u} + \frac{e}{2!} + \frac{e}{3!} u + \cdots + \frac{e}{n!} u^{n-2} + \cdots \\ &= \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1} + \frac{e}{2!} + \frac{e}{3!} (z-1) + \cdots + \frac{e}{n!} (z-1)^{n-2} \\ &\quad + \frac{e}{(n+1)!} (z-1)^{n-1} + \frac{e}{(n+2)!} (z-1)^n + \cdots \end{aligned}$$

$$(2) f(z) = \frac{1}{z-2} \quad (z=1)$$

（解法） $z-1$ のべき乗の形を作るので、 $z-2 = -\{1-(z-1)\}$ と変形して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{1-(z-1)} \\ &= -\{1 + (z-1) + (z-1)^2 + \cdots + (z-1)^n + \cdots\} \\ &= -1 - (z-1) - (z-1)^2 - \cdots - (z-1)^n - \cdots \end{aligned}$$

$$(3) f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)} \quad (z=-1)$$

（解法）この場合は、まず部分分数分解して、 $\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1}$ として、

$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{1+(z+1)}$ より、 $z+1$ のべき乗の形を作る。

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z+1)(z+2)} &= \frac{2}{1+(z+1)} - \frac{1}{z+1} \\ &= 2\{1 - (z+1) + (z+1)^2 - (z+1)^3 + \cdots + (-1)^n (z+1)^n + \cdots\} - \frac{1}{z+1} \\ &= -\frac{1}{z+1} + 2 - 2(z+1) + 2(z+1)^2 - 2(z+1)^3 + \cdots + 2(-1)^n (z+1)^n + \cdots \end{aligned}$$

問題 次の関数を（ ）内の値を中心とするローラン展開を求めよ

$$(1) f(z) = \frac{e^z}{(z+2)^3} \quad (z=-2)$$

$$\text{解答：} f(z) = \frac{1}{e^2(z+2)^3} + \frac{1}{e^2(z+2)^2} + \frac{1}{2e^2(z+2)} + \frac{1}{3!e^2} + \frac{1}{4!}(z+2) + \cdots + \frac{1}{n!}(z+2)^{n-3} + \cdots$$

($|z+2| < \infty$)

$$(2) f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2} \quad (z=0)$$

$$\text{解答：} f(z) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} z^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n-2} + \cdots \quad (|z| < \infty)$$

$$(3) \quad f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2} \quad (z \neq 1)$$

$$\text{解答: } f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + 1 - (z-1) + (z-1)^2 - \cdots + (-1)^n (z-1)^{n-2} + \cdots$$

$$(|z-1| < \infty)$$

$$(4) \quad f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} \quad (z \neq 0)$$

$$\text{解答: } f(z) = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}z + \cdots + \frac{1}{n!}z^{n-2} + \cdots \quad (0 < |z| < \infty)$$

$$(5) \quad f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} \quad (z \neq 1, 3)$$

$$\text{解答: } f(z) = -\frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(z-1) - \cdots - \frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1} - \cdots \quad (|z-1| < 2)$$