

複素関数論（１５）留数

クラス

番 名前

【定理： m 位の極であるための条件】

点 $z = a$ で正則 な関数 $h(z)$ があって、
$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m} \quad (m \geq 1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

とかけ、かつ $\lim_{z \rightarrow a} h(z) \neq 0$ であるとき、 $z = a$ は $f(z)$ の m 位の極である。

逆に、 $z = a$ が $f(z)$ の m 位の極であれば、 $f(z)$ は $\textcircled{1}$ の形にかけ、 $\lim_{z \rightarrow a} h(z) \neq 0$ である。

1. 次の問いに答えよ。

- (1) $f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^3}$ を $z = 1$ を中心とするローラン展開を求めよ。 $z = 1$ における留数 $\text{Res}[f(z), 1]$ も求めよ。

解答：ローラン展開は

$$f(z) = \frac{1}{e(z-1)^3} - \frac{1}{e(z-1)^2} + \frac{1}{2e(z-1)} - \frac{1}{3!e} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!e}(z-1)^{n-3} + \cdots$$
$$\text{Res}[f(z), 1] = \frac{1}{2e}$$

- (2) $\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^3} dz \quad (C : |z| = 2)$ の値を求めよ。

解答： $f(z)$ の孤立特異点 $z = 1$ は C の内部にあるので、 ← この 1 文は必ずかくこと。

$$\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^3} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}[f(z), 1] = 2\pi i \frac{1}{2e} = \frac{\pi i}{e}$$

2. 次の関数の孤立特異点を分類せよ。理由も書くこと。また、それぞれの留数も求めよ。

- (1) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

ヒント：ローラン展開をする。

解答：ローラン展開の主要部が無限個あるので、 $z = 0$ は $f(z)$ の真性特異点である。

$$\text{Res}[f(z), 0] = 1$$

$$(2) \ g(z) = \frac{z+1}{z^2+9}$$

ヒント : $g(z) = \frac{h_1(z)}{(z-a)}$ とおいたとき、 $h_1(z)$ は $z=a$ で正則であり、 $\lim_{z \rightarrow a} h_1(z) \neq 0$ であることを示すことで、 $z=a$ が $g(z)$ の 1 位の極であることが言える。

$$1 \text{ 位の極なら、} \operatorname{Res}[g(z), a] = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)g(z)$$

ただし、この問題は $\frac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ であるので、極限值でのところは代入で十分である。

解答 : 孤立特異点は $z = \pm 3i$ である。

$$z = -3i \text{ について、} 1 \text{ 位の極である。} \operatorname{Res}[g(z), -3i] = \frac{3+i}{6}$$

$$z = 3i \text{ について、} 1 \text{ 位の極である。} \operatorname{Res}[g(z), 3i] = \frac{3-i}{6}$$

$$(3) \ f(z) = \frac{z^3+2z}{(z-i)^3}$$

ヒント : 理由は、プリント 1 ページ目参照

$$\text{解答 : } z=i \text{ は } f(z) \text{ の } 3 \text{ 位の極。} \operatorname{Res}[f(z), i] = 3i$$

$$(4) \ f(z) = \frac{e^z}{z^4}$$

ヒント : 理由は、プリント 1 ページ目参照

$$\text{解答 : } z=0 \text{ は } f(z) \text{ の } 4 \text{ 位の極。} \operatorname{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{6}$$