複素関数論（１６）留数定理とその応用

クラス＿＿＿＿＿＿＿ ＿＿＿＿＿＿＿番 名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. $I = \displaystyle\int_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z+3)}$ を、次の問いに答えよ。

(1) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2(z+3)}$ の孤立特異点とその留数を求めよ。

ヒント：孤立特異点は $z=-3$ と $z=1$ である。このそれぞれについて、孤立特異点を分類し、留数を求める。

理由をしっかりと書くこと。

解答：$z=-3,\ 1 \quad \mathrm{Res}[f(z),-3] = \dfrac{e^{-3}}{16},\quad \mathrm{Res}[f(z),1] = \dfrac{3e}{16}$

(2) 次のそれぞれの場合について、 I の値を求めよ。

(i) $C : |z| = 2$

ヒント：C の内部ある孤立特異点を見つけ、留数定理を使う。

解答：$I = \dfrac{3e\pi i}{8}$

(ii) $C : |z+1| = 3$

ヒント：C の内部ある孤立特異点を見つけ、留数定理を使う。

解答：$I = \dfrac{\pi i}{8}(3e + \dfrac{1}{e^3})$

2. 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos\theta}\, d\theta$ を求めよ。　(問 4.9)

① $z = e^{i\theta}$ とおき、z の関数の、$C : |z| = 1$ 上の積分に変形する。

② 式を整理して、留数定理を用いる。

ヒント：$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos\theta}\, d\theta = \frac{2}{i}\int_C \frac{1}{z^2+6z+1}\, dz \leftarrow$ この式変形をきちんとかく。

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+6z+1}$ の孤立特異点のうち、C の内部あるものを求め、分類し、留数を求める。

さらに留数定理より、積分の値を求める。

解答：$I = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$