

複素関数論 (4)

クラス

番 名前

1. 関数 $w = \frac{1}{z}$ によって、 z 平面上の次の図形は w 平面上のどんな図形に移るか。

(1) 円 $|z| = \frac{1}{2}$

解答 原点中心半径 2 の円に移る
(向きは逆向きに動く)

(2) 円 $|z| = 2$

解答 原点中心半径 $\frac{1}{2}$ の円に移る
(向きは逆向きに動く)

(3) 直線 $\text{Im}(z) = 1$

解答 $(0, -\frac{1}{2})$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円に移る
ただし、原点を除く。

※なぜそうなるか、理由を考える。

(3) のヒント: $z = x + iy$, $w = u + iv$ とおくと、 $\text{Im}(z) = 1$ より、 $y = 1$ である。すなわち、 $z = x + i$ である。このとき、 $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + i}$ を変形して、 u, v をそれぞれ x の関数で表す。それらの式から、 x を消去した式を作る。

2. 指数関数 e^z について、次の問いに答えよ。

(1) $e^z = e^{2z}$ を満たす z を求め、複素平面上に図示せよ。

解答: $z = 2n\pi i$ (n は整数)

ヒント: $e^z = t$ とおくと、 $t = t^2$ の方程式を解くことになる。ただし、 $t \neq 0$ に注意する。
 $z = x + iy$ において、 x, y をそれぞれ求める。

(2) 指数関数 e^z が実数となるのは、 z が複素平面上のどこにあるときか。

解答: $z = x + n\pi$ (n は整数)

ヒント: $z = x + iy$ とすると、 $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ より、 e^z が実数になるための条件を考える。

3. 指数関数 e^z について、次のことを証明せよ。

(1) $e^z \neq 0$

ヒント：オイラーの公式を使う。 $\cos y$, $\sin y$ は同時には 0 にはならないことに注意する。

(2) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

ヒント：オイラーの公式を使い、丁寧に計算する。

$$\overline{e^z} = \overline{e^x \cos y + ie^x \sin y} = e^x \cos y - ie^x \sin y = \dots$$

(3) $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$

ヒント： $|e^{iy}| = 1$ を用いる。または、定義にしたがって、

$$|e^z| = \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} \text{ を丁寧に計算する。}$$

(4) $e^{z_1 - z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$

ヒント： $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ とおき、右辺から左辺に変形する。

実数の指数法則は使える。 $\frac{e^{iy_1}}{e^{iy_2}} = e^{i(y_1 - y_2)}$ を丁寧に示す。

これも、オイラーの公式を使う。