

複素関数論（５）

クラス

番 名前

1. 次の各値を $u + iv$ の形で表せ。

(1) $\sin(\frac{\pi}{2} + i)$

(2) $\cos(\frac{\pi}{3} - i)$

解答: $\frac{1}{2}(e + \frac{1}{e})$

解答: $\frac{1}{4}(e + \frac{1}{e}) + \frac{\sqrt{3}}{4}(e - \frac{1}{e})i$

(3) $\tan(-i)$

解答: $\frac{\frac{1}{e} - e}{\frac{1}{e} + e}i \left(= \frac{1 - e^2}{1 + e^2}i \right)$

2. z を複素数とすると、次の問いに答えよ。

(1) y を実数とすると、 $\cos(iy) \geq 1$ を示せ。

ヒント: $\cos(iy)$ を変形し、途中で、相加平均・相乗平均の不等式を使う。

(2) $\sin z = 2$ を解け。

ヒント: $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ を代入し、 $e^{iz} = t$ において、 t の 2 次方程式を解く。

さらに、 t の値に対して、 $z = x + iy$ として、 $e^{i(x+iy)} = t$ を解いて、 x, y を求める。

解答: $t = (2 + \sqrt{3})i$ のとき、 $z = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi) - i\log(2 + \sqrt{3})$

$t = (2 - \sqrt{3})i$ のとき、 $z = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi) - i\log(2 - \sqrt{3})$ ただし、 n は整数。

3. 次の式を示せ。ただし、 $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ である。
(これらを、**双曲線関数** という。)

(1) $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin z$

ヒント：定義に従い、左辺から右辺に変形する。

(2) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

ヒント：定義に従い、右辺から左辺に変形した方が良い。

(3) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

ヒント：定義に従い、左辺から右辺に変形する。