複素関数論（８）

クラス＿＿＿＿＿＿　＿＿＿＿＿番　名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 次の関数が正則であるか調べよ。また、正則である場合には、関数の実部、虚部のそれぞれが調和関数となっていることも確かめよ。$(z = x + iy)$

(1) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$

ヒント：
$u = x^3 - 3xy^2,\ v = 3x^2y - y^3$ とおき、
コーシー・リーマンの関係式を満たしている
ことを確認する。
また、調和関数であることは、それぞれ
$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ v_{xx} + v_{yy} = 0$ を示す。

(2) $f(z) = x^2 + y^2 i$
ヒント：$u = x^2,\ v = y^-2$ とおき、（１）と同じ方針で。

(3) $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{y}{x^2 + y^2} i$

ヒント：$u = \dfrac{x}{x^2 + y^2},\ v = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ とおき、（１）と同じ方針で。

2. 関数 $f(z) = |z|^2$ は $z = 0$ で微分可能であるが、正則ではないことを示せ。

ヒント：
○コーシー・リーマンの関係式が、$z \neq 0$ （原点以外）では成り立たないことを示す。
○ $f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z}$ を計算して、極限値があることを示す。
　ちなみに、極限値は 0 である。
【注意】「微分可能」と「正則」の違いを理解する。

3. 実部が $u(x, y) = x^2 + 3x - y^2$ であるような正則関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の虚部の関数 $v(x, y)$ を見つけよ。

解答：$v = 2xy + 3y + C$ 　(ただし、C は任意定数)

ヒント：コーシー・リーマンの関係式から $u = 2y,\ v = 2x + 3$ を満たす。
この 2 式から、v を求める。